

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 13 - גיאומטריה אוקלידית - משולשים

תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות..... 1
2. זוויות במשולשים..... 3
3. משולש שווה שוקיים ושווה צלעות..... 6
4. חפיפת משולשים..... 8
5. זווית חיצונית במשולש..... 14
6. משולש ישר זווית..... 15
7. קטע אמצעים במשולש..... 18
8. מפגש תיכונים במשולש..... 20

הגדרות כלליות:

סוגי משולשים:

ניתן למיין את המשולשים לפי זוויות או לפי צלעות.
לפי זוויות:

1. משולש חד זווית – משולש שכל זוויותיו חדות.
2. משולש ישר זווית – משולש בעל זווית ישרה.
3. משולש קהה זווית – משולש בעל זווית קהה.

לפי צלעות:

4. משולש שונה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שונות באורכן.
5. משולש שווה שוקיים – משולש שבו שתי צלעות שוות.
6. משולש שווה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שוות באורכן.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

1. משולש חד זווית: 2. משולש ישר זווית: 3. משולש קהה זווית:



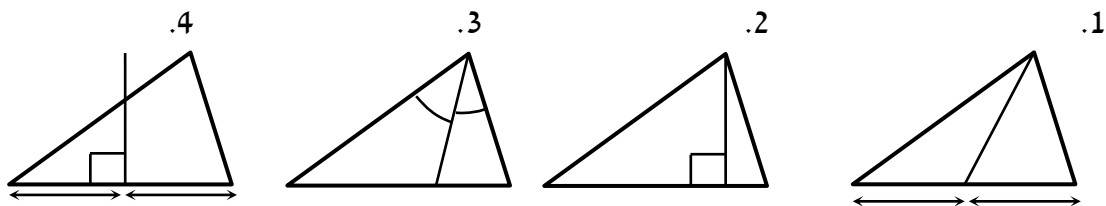
4. משולש שונה צלעות: 5. משולש שווה שוקיים: 6. משולש שווה צלעות:



קטעים מיוחדים במשולשים:

1. תיכון – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.
2. גובה – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו ומאונך לה.
3. חוצה זווית – קטע היוצא מקדקוד וחוצה את הזווית שממנה הוא יוצא.
4. אנך אמצעי – קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:



משפטים כלליים במשולשים:

- סכום הזוויות במשולש הוא 180° .
- סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
- במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך.
- במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך.
- במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך.

זוויות במשולשים:

שאלות:

(1) חשב את הזוויות בכל אחד מהמשולשים שלפניך:



(2) במשולש שלפניך נתון AD חוצה זווית A.

נתון: $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 56^\circ$.

חשב את הזוויות $\angle A_1$, $\angle D_1$.



(3) נתון משולש ABC ובו AD גובה לצלע BC.

$\angle D = 90^\circ$ הקטע CE חוצה זווית C.

כמו כן: $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 63^\circ$.

חשב את זוויות המשולש ABC.



(4) בסרטוט שלפניך נתון: $AB \parallel CD$.

מצא את הזוויות α ו- β .



(5) שלוש זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו: 1:2:6.

חשב את זוויות המשולש.

- (6) בסרטטים שלפניך נתונים משולשים שווים שוקיים ($AB = AC$) שאחת מזוויותיהם נתונה. מצא את הגודל x בכל סרטוט.



- (7) הגובה לשוק המשולש שווה השוקיים ABC ($AB = AC$), יוצר זווית בת 24° עם הבסיס BC . מצא את זוויות המשולש ABC .

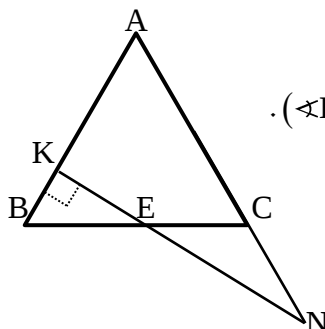
- (8) חשב את זוויות המשולשים בכל אחד מהמקרים הבאים:
- א. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה פי ארבעה מזווית הראש. מצא את זוויות המשולש.
- ב. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה ב- 12° מזווית הראש. מצא את זוויות המשולש.



- (9) באיור שלפניך נתון: $\angle A = 40^\circ$, $AD = AE$, $AB = AC$. א. חשב את הזוויות: $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$. ב. הוכח: $DE \parallel BC$.



- (10) באיור שלפניך נתון: $AB = AC$. מעבירים את הקטעים BN ו- MN כך שמתקיים: $BM = BN = BC$. נתון בנוסף: $\angle A = 32^\circ$. חשב את זוויות: $\angle B_1$, $\angle ANM$.



- (11) משולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). בנקודה K כלשהי על AB מעלים אנך ל- AB ($\angle K = 90^\circ$). אנך זה חותך את BC בנקודה E ואת המשך AC בנקודה N . מתקיים: $CE = CN$. חשב את זוויות המשולש ABC .

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \alpha = 60^\circ \text{ א.} \quad \alpha = 20^\circ \text{ ב.} \quad \alpha = 35^\circ \text{ ג.} \quad \alpha = 20^\circ \text{ ד.}$$

$$\text{ה. } \alpha = 10^\circ, \beta = 58^\circ \quad \text{ו. } \alpha = 37\frac{2}{3}^\circ, \beta = 30\frac{1}{3}^\circ$$

$$(2) \quad \angle A_1 = 42^\circ, \angle D_1 = 98^\circ$$

$$(3) \quad \angle A = 78^\circ, \angle B = 48^\circ, \angle C = 54^\circ$$

$$(4) \quad \alpha = 64^\circ, \beta = 46^\circ$$

$$(5) \quad 20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$$

$$(6) \quad \text{א. } x = 50^\circ \quad \text{ב. } x = 22^\circ$$

$$(7) \quad \angle A = 48^\circ, \angle B = \angle C = 66^\circ$$

$$(8) \quad \text{א. } 20^\circ, 80^\circ, 80^\circ \quad \text{ב. } 52^\circ, 64^\circ, 64^\circ$$

$$(9) \quad \text{א. } \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 70^\circ \quad \text{ב. שאלת הוכחה}$$

$$(10) \quad \text{א. } \angle B_1 = 42^\circ, \angle ANM = 37^\circ$$

$$(11) \quad \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

משולש שווה שוקיים ושווה צלעות:

סיכום כללי:

משפטים במשולש שווה שוקיים:

- במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
(משפט הפוך) משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.
- במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים.
(משפט הפוך) משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון הוא משולש שווה שוקיים.

משפטים במשולש שווה צלעות:

- במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות 60° .
(משפט הפוך) משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

איורים:

משפט במשולש שווה צלעות



משפט במשולש שווה שוקיים



שאלות:



- 12** המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים ($AB=AC$).
 AG חוצה את זווית A.
 M היא נקודה כלשהי על AG.
 הוכח כי: $BM = CM$.



- 13** המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים ($AB=AC$).
 AG ו-BP חוצים את הזוויות A ו-ABC בהתאמה.
 הנקודה Q נמצאת על המשך AG.
 נתון: $GM = GQ$.
 הוכח: $\angle B_1 = \angle B_3$.

תשובות סופיות:

- 12** שאלת הוכחה.
13 שאלת הוכחה.

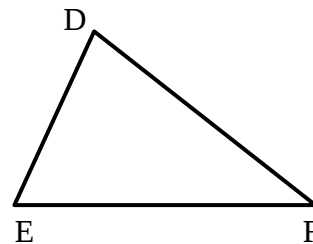
חפיפת משולשים:

סיכום כללי:

הגדרה:

משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.

סימון מתמטי: $\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DE, AC = DF, BC = EF \\ \sphericalangle A = \sphericalangle D, \sphericalangle B = \sphericalangle E, \sphericalangle C = \sphericalangle F \end{cases}$

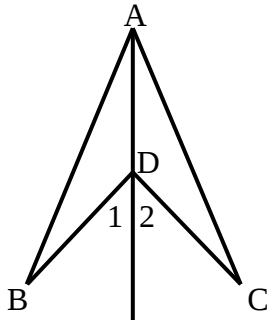
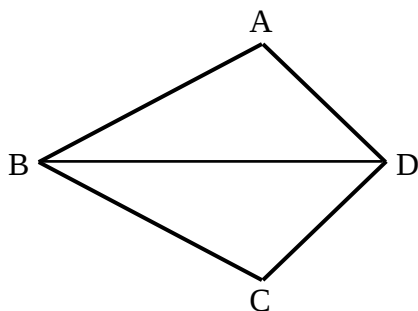


משפטי החפיפה:

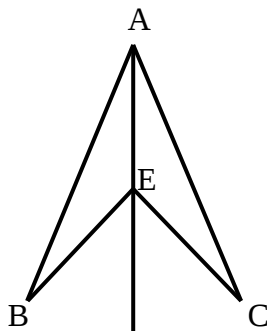
- משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ.):
אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז.):
אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ.):
אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-זווית הגדולה (צ.צ.ז.):
אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

שאלות:**שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-זווית-צלע:****14** באיור שלפניך הקטעים AB ו-CD חוצים

זה את זה בנקודה O.

הוכח: $\triangle ACO \cong \triangle BDO$.**15** באיור שלפניך נתון: $BD = CD$.כמו כן: $\angle D_1 = \angle D_2$.הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.**16** בסרטוט שלפניך נתון: $AB = AC$, $\angle B = \angle C$, $BE = CD$ הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.**שאלות העוסקות במשפט חפיפה זווית-צלע-זווית:****17** במרובע ABCD נתון כי BD

חוצה את זוויות B ו-D.

הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.**18** בסרטוט שלפניך נתון:

AE חוצה את הזוויות BAC ו-BEC.

הוכח: $\triangle ABE \cong \triangle ACE$.



19) בציור שלפניך נתון:

$$AC = BD, \alpha = \beta$$

$$AB \perp BE, AB \perp AK$$

הוכח: $\triangle AKC \cong \triangle BED$

שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-צלע:



20) באיור שלפניך נתון:

$$KL = MN, KN = LM$$

הוכח: $\triangle KLN \cong \triangle MLN$

שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-זווית שמול הצלע הגדולה:



21) בציור שלפניך נתון:

$$AC = DE, AB = BE = AD$$

הוכח כי הנקודה D היא אמצע BC.

שאלות העוסקות בשלושת משפטי החפיפה יחדיו:



22) במרובע ABCD נתון:

$$AB = BC, AD = CD$$

הוכח: $\angle A = \angle C$



23) הקטע AD הוא קו ישר.

$$AE = DF, AC = BD$$

$$\angle A = \angle D$$

הוכח כי הקטעים BE ו-FC שווים.



- (24) באיור שלפניך נתון:
- הנקודה F היא אמצע הקטע AC.
 - מתקיים: $\angle BAC = \angle ACE$.
 - הקטעים BD ו-CE שווים.
 - הוכח את הטענות הבאות:
 - א. F היא אמצע הקטע DE.
 - ב. D היא אמצע הקטע AB.



- (25) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
נתון: $AK = BE = CN$.
הוכח כי $\triangle KEN$ הוא גם משולש שווה צלעות.

שאלות העוסקות במשולשים המכסים חלקית זה את זה:



- (26) בציור שלפניך נתון: $AC = CE$, $DC = BC$.
הוכח:
- א. $\triangle CDE \cong \triangle CBA$.
 - ב. $\angle ADE = \angle ABE$.



- (27) באיור שלפניך נתון:
- $\angle DBC = \angle ACB$, $\angle ABC = \angle DCB$.
 - הוכח: $AB = CD$.



- (28) בציור שלפניך נתון:
- $AB = BC$, $BE = BN$
 - $AB \perp BC$, $BE \perp BN$
 - הוכח: $AN = CE$.

שאלות העוסקות בשתי חפיפות:

(29) בסרטוט שלפניך נתון כי BD הוא קו ישר.

מתקיים: $AD = CD$, $AB = BC$.

הנקודה E נמצאת על BD.

הוכח כי: $AE = CE$.



(30) בציור שלפניך נתון כי AD הוא קו ישר. מתקיים:

$\angle AEC = \angle DFB$, $\angle A = \angle D$

וכן $AE = DF$. הוכח:

א. $CE = BF$

ב. $BE = CF$



שאלות העוסקות בחפיפות עם משולש שווה שוקיים:

(31) נתון משולש שווה שוקיים $\triangle ABC$, $(AB = AC)$.

מתקיים: $BD = CE$.

הוכח: $AD = AE$.



(32) בסרטוט שלפניך נתון משולש

שווה שוקיים $\triangle ABC$, $(AB = AC)$.

הנקודה O היא אמצע BC.

מתקיים: $\angle O_1 = \angle O_2$.

הוכח: $AD = AE$.



(33) במשולש שווה שוקיים $\triangle ABC$, $(AB = AC)$

הנקודות S ו-R הן אמצעי השוקיים.

ידוע כי $BD = CE$.

הוכח כי: $SE = RD$.





34 נתון משולש ABC. הקטעים AD ו-AE ישרים ונתון בנוסף כי: $DC = BE$, $BD = CE$. הוכח: $AB = AC$.



35 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). על השוק AC ועל הבסיס BC בונים משולשים שווים צלעות ACE ו-BCD. מחברים את הנקודה D עם הקדקודים A ו-E.
 א. הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.
 ב. ידוע גם כי: $DE \parallel BC$.
 הוכח: $\angle ADE = 90^\circ$.

תשובות סופיות:

- 14 שאלת הוכחה.
- 15 שאלת הוכחה.
- 16 שאלת הוכחה.
- 17 שאלת הוכחה.
- 18 שאלת הוכחה.
- 19 שאלת הוכחה.
- 20 שאלת הוכחה.
- 21 שאלת הוכחה.
- 22 שאלת הוכחה.
- 23 שאלת הוכחה.
- 24 שאלת הוכחה.
- 25 שאלת הוכחה.
- 26 שאלת הוכחה.
- 27 שאלת הוכחה.
- 28 שאלת הוכחה.
- 29 שאלת הוכחה.
- 30 שאלת הוכחה.
- 31 שאלת הוכחה.
- 32 שאלת הוכחה.
- 33 שאלת הוכחה.
- 34 שאלת הוכחה.
- 35 שאלת הוכחה.

זווית חיצונית במשולש:

סיכום כללי:

הגדרה:

זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.

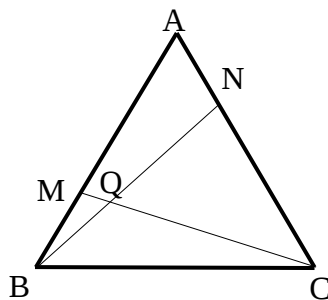


משפט:

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

שאלות:

36 הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.



37 המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה צלעות.

נתון: $AN = BM$.

הוכח: $\angle NQC = 60^\circ$.

תשובות סופיות:

36 שאלת הוכחה.

37 שאלת הוכחה.

משולש ישר זווית:

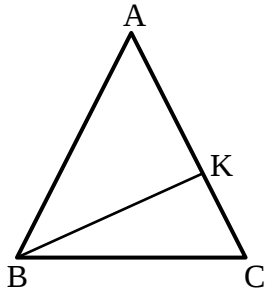
סיכום כללי:

משפטים במשולש ישר זווית:

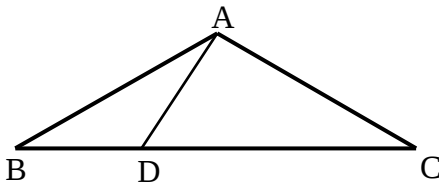
- סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא 90° .
- במשולש שזוויותיו 90° , 60° , 30° , הניצב שמול הזווית של ה- 30° שווה למחצית היתר. (משפט הפוך ל-2) אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה היא בת 30° .
- במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר. (משפט הפוך ל-4) אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית (כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).
- משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר. כלומר: $(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$.
- (משפט הפוך למשפט פיתגורס) אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

איורים:

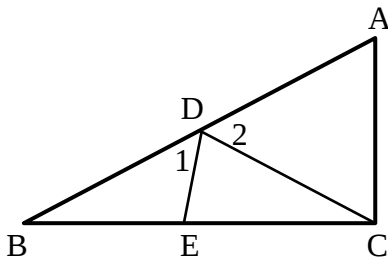


שאלות:

- (38)** באיור שלפניך נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$).
 זווית הבסיס: $\angle C = 75^\circ$
 וכן: 16 ס"מ $AC =$. מעבירים גובה BK לשוק AC .
 מצא את אורך הגובה BK .



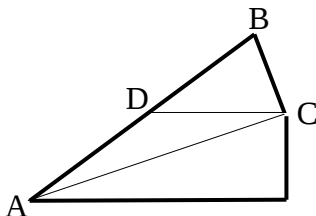
- (39)** המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).
 נתון: $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle DAC = 90^\circ$,
 18 ס"מ $BC =$.
 חשב את אורכו של הקטע BD .



- (40)** המשולש $\triangle ABC$ הוא ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$).
 מעבירים תיכון CD ליתר AB במשולש.
 הנקודה E נמצאת על BC כך ש- $CD = CE$.
 ידוע כי: $\angle CED = 80^\circ$.
 מצא את הזוויות: $\angle D_1$, $\angle D_2$.



- (41)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). BQ הוא הגובה ליתר AC ו- BP הוא התיכון ליתר AC .
 נתון: $BQ = \frac{1}{2} BP$.
 חשב את גודלה של הזווית C .



- (42)** המשולש BCD שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($BD = DC$).
 AC חוצה את הזווית $\angle BAE$.
 נתון: $DC \parallel AE$.
 חשב את גודלה של הזווית $\angle ACB$.



- (43)** AD הוא גובה במשולש ABC.
 נתון: $AB = 15$ ס"מ, $AC = 20$ ס"מ, $BC = 25$ ס"מ.
 א. מצא את אורכו של AD ואת שטח המשולש ABC.
 ב. האם המשולש ABC ישר זווית? נמק.

תשובות סופיות:

- (38)** 8 ס"מ.
(39) 6 ס"מ.
(40) $\angle D_1 = 60^\circ$, $\angle D_2 = 40^\circ$
(41) 75°
(42) 90°
(43) א. $AD = 12$ ס"מ, $S_{ABC} = 150$ סמ"ר.
 ב. כן.

קטע אמצעים במשולש:

סיכום כללי:

הגדרה:

קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

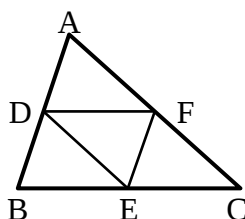
- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- (משפט הפוך 1): קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
- (משפט הפוך 2): קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

איור – קטע אמצעים במשולש:



שאלות:

44) לפניך משולשים עם קטע אמצעים בתוכם. מצא את x בכל אחד מהמקרים:



45) הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש $\triangle ABC$. נתון: $DE = 9$ ס"מ, $EF = 12$ ס"מ, $DF = 10$ ס"מ. חשב את היקף המשולש $\triangle ABC$.



- 46) הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle ABC$.
 הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle ABDE$.
 נתון: $3 \text{ ס"מ} = NF$. מצא את אורך הצלע BC.



- 47) הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle ABC$.
 AQ הוא גובה לצלע BC.
 הוכח: $\angle N_1 = \angle N_2$.



- 48) AF הוא גובה לצלע BC ו-GC הוא תיכון לצלע AB במשולש $\triangle ABC$.
 הקטע GH מאונך לצלע BC.
 א. הוכח: $HF = BH$.
 ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ .
 חשב את אורך הקטע EF.

תשובות סופיות:

- 44) א. $x = 7$ ב. $x = 8$ ג. $x = \sqrt{13.5}$
 45) 62 ס"מ .
 46) 12 ס"מ .
 47) שאלת הוכחה.
 48) א. שאלת הוכחה. ב. 3 ס"מ .

מפגש תיכונים במשולש:

סיכום כללי:

- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 2:1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
- אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 2:1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
- נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.

איור – מפגש תיכונים במשולש:

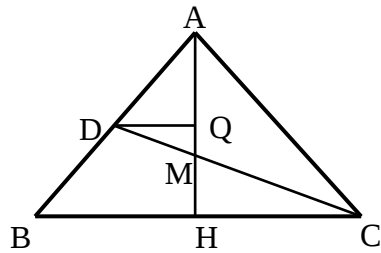


שאלות:

49) הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:



50) הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש $\triangle ABC$ אשר נחתכים בנקודה M.
נתון: $AD = AM$ וכן: $AC = 30$ ס"מ.
חשב את AE.



- (51)** המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא מש"ש
($AB = AC$) שבו AH הוא הגובה לבסיס BC .
 CD , התיכון לשוק AB ,
יוצר זווית של 30° עם הבסיס BC .
נתון: $DQ \parallel BC$, $BC = 12\sqrt{3}$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע MQ .



- (52)** במשולש $\triangle ABC$ נחתכים התיכונים בנקודה N .
נתון: $\angle CNB = 90^\circ$.
הוכח: $BC = AN$.

תשובות סופיות:

- (49)** א. $x = 1$ ב. $x = 3$ ג. $x = 4$
(50) 22.5 ס"מ.
(51) 3 ס"מ.
(52) שאלת הוכחה.